

Chaos in konservativen Systemen am Beispiel des Sonnensystems

MELANIE KÖHLER, VOLKHARD NORDMEIER, H. JOACHIM SCHLICHTING

nordmeier@uni-muenster.de, schlichting@uni-muenster.de

Westfälische-Wilhelms-Universität Münster
Institut der Didaktik der Physik
Wilhelm-Klemm-Straße 10
48149 Münster

Kurzfassung

Nachdem durch das kopernikanische System die Erde zum Planeten avanciert und damit die alte Sicherheit eines „festen Grundes“ nicht mehr gegeben war, beschäftigte die Physiker immer wieder die Frage nach der Stabilität des Planetensystems. Lange vertraute man auf Laplaces Beweis der Stabilität, bis gegen Ende des 19. Jahrhunderts Poincaré zeigte, dass selbst in einem Planetensystem aus nur drei Körpern chaotisches Verhalten eintreten kann.

Im Rahmen der Untersuchung dynamischer Systeme hat man sich seit einigen Jahren dieser Problematik erneut angenommen und vor allem mit Hilfe von Computersimulationen gezeigt, wie trügerisch die Vorstellung einer vollkommenen Periodizität der Bewegung ist. Am Beispiel des eingeschränkten Dreikörperproblems wird die Thematik mit Blick auf einen schulischen Zugang diskutiert.

1 Einleitung

Seit die ersten Astronomen begannen, die Planetenbewegungen zu beschreiben, gelang es im Lauf der Zeit mit Hilfe eines immer komplizierter werdenden Systems ineinandergreifender Kreisbahnen die Bewegungen mit zunehmender Genauigkeit vorherzusagen. Allerdings blieb man lange Zeit bei bloßen Beschreibungen. Die Erklärung der Bewegungen aus einem einheitlichen physikalischen Prinzip heraus gelang erst Isaac Newton auf der Grundlage der Keplerschen Gesetze mit im Rahmen des Gravitationsgesetzes: Ein System aus einem Zentralkörper und einem Planeten wird durch eine einfach zu lösende lineare Differenzialgleichung beschrieben. Das Problem wird jedoch komplizierter und nicht mehr analytisch lösbar, wenn ein dritter oder gar ein vierter Körper berücksichtigt wird. Selbst mit Hilfe der Störungsrechnung, bei der einer lösbaren Ausgangsgleichung, etwa die eines Zweikörperproblems, Störungsterme additiv überlagert werden, ist die analytische Lösung der Differenzialgleichungen unmöglich. Wenn eine solche Lösung vorhanden wäre, müsste diese auf Divergenz oder Konvergenz untersucht werden, wobei ein divergierender Term ein instabiles Verhalten des Sonnensystems bedeuten würde. Durch das Vernachlässigen einiger Störungsterme wäre eine Lösung vielleicht auffindbar, aber ob sie dann noch zutreffend wäre, muss wegen der dabei verloren gegangenen Informationen bezweifelt werden.

Bekannte Astronomen, Physiker und Mathematiker wie z. B. HIPPARCH (190 - 125 v. Chr.), Claudius PTOLEMÄUS (100 - 178), Tycho BRAHE (1546 - 1601), Johannes KEPLER (1571 - 1630), Leonhard EULER (1707 - 1783), Karl WEIERSTRASS (1815-1897), Joseph Louis de LAGRANGE (1736 - 1813)

und Pierre-Simon de LAPLACE (1749 - 1827) haben vergeblich versucht, das Problem abschließend zu lösen. Erst eine Arbeit von Jules Henri POINCARÉ (1854 - 1912) ermöglichte es durch einen trickreichen Zugang, die komplizierten Zusammenhänge wenigstens zu visualisieren. Mit Hilfe eines Schnittes durch den vierdimensionalen Phasenraum, dem so genannten Poincaréschnitt, konnte er die Bewegungen der Körper „sichtbar“ machen und somit zwischen stabilen, quasiperiodischen und chaotischen Orbits unterscheiden.

Mit der Entwicklung leistungsfähiger Computer gelang es schließlich, die Differenzialgleichungen zu lösen, und die Bahnen der Planeten über einige Mio. oder heute Mrd. Jahre zu berechnen. Hervorzuheben sind insbesondere Arbeiten von Jacques LASKAR, Jack WISDOM und Jay SUSSMAN.

In ihren Auswertungen der Simulationen spielt der Begriff „Chaos“ eine entscheidende Rolle. Chaotische Systeme sind solche, die aufgrund der sensitiven Abhängigkeit des Systemverhaltens von den Anfangsbedingungen ein irreguläres, nicht vorhersehbares Verhalten zeigen. Daher ist chaotisches Verhalten ein häufig zu beobachtendes Merkmal sowohl dissipativer als auch konservativer dynamischer Systeme.

2 Das Sonnensystem: Stabilität und/oder Chaos?

Das Chaos, das bisher im Sonnensystem gefunden wurde, bezieht sich auf ganz unterschiedliche Bereiche und entsteht aus unterschiedlichen Gründen. Die Bewegung der Asteroiden zwischen Mars und Jupiter wird durch die unterschiedlichen Resonanzen, die im sogenannten Asteroidengürtel durch den Einfluss der Planeten auftreten, beeinflusst. Bei einer genauen Betrachtung dieses Gürtels wird

deutlich, dass zum einen Lücken in bestimmten Bereichen auftreten und zum anderen Häufungen zu sehen sind (Abb. 1). Durch Messungen ist feststellbar, dass diese Lücken und Haufen bei bestimmten Umlaufverhältnissen mit Jupiter auftreten. Befindet sich ein kleiner Körper in einem *rationalen* Umlaufverhältnis zu einem großen Körper, so kann es zu Aufschaukelungen und schließlich zum Herausschleudern des kleineren Körpers aus seiner Bahn kommen. Besteht ein irrationales Verhältnis zwischen den Frequenzen der Körper, bleibt die Bahn der Körper stabil. Dieses sogenannte KAM-Theorem wird nach KOLMOGOROW, ARNOLD und MOSER benannt, die diesen Satz fanden und bewiesen.

Der Asteroidengürtel kann in drei unterschiedliche Bereiche eingeteilt werden, in denen die Dynamik der Körper durch verschiedene Störungen geprägt ist (Abb.1). Im Hauptgürtel zwischen 2 und 3,3 AE (AE: Astronomische Einheit) befinden sich die meisten Asteroiden. Gelangen sie in ein ganzzahliges Umlaufverhältnis mit Jupiter, ist ihre Lebensdauer in diesem Abschnitt des Sonnensystems sehr klein. Wenn es zu einer Überlagerung innerhalb der Kommensurabilitäten mit den säkularen

Resonanzen kommt, wird das Herausschleudern der Körper beschleunigt. Planetoiden, die sich in irrationalen Umlaufverhältnissen mit Jupiter befinden, sind geschützter vor auftretenden Störungen, wie sich aus dem KAM-Theorem ergibt. Besondere Beachtung fanden in dem sogenannten Hauptgürtel die 3:1, die 5:2 und die 2:1 Resonanzzonen mit Jupiter. Die auftretenden bekannten Störungen durch die äußeren Planeten beeinflussen das Verhalten der Körper in diesen Bereichen sehr deutlich, aber es treten einige Verhaltensweisen der Planetoiden auf, die noch nicht erklärbar sind. So sind beispielsweise einige Positionen innerhalb dieser Kommensurabilitäten geleert, obwohl sich hier anhand der Simulationen Körper aufhalten könnten. Außerdem wird das Verhalten einiger Asteroiden erst nach einer sehr langen Zeit chaotisch, so dass nicht nur die Störung der Planeten verantwortlich sein kann.

Die Verteilung der Asteroiden im Bereich zwischen 3,3 und 3,9 AE ist sehr schwer verständlich, und es treten ähnliche Probleme wie im Hauptgürtel auf: Die Störungen durch die äußeren großen Planeten beeinflussen das Verhalten der Körper, doch die Beobachtungen und die Berechnungen weisen noch

einige Unterschiede auf. Erst mit den Untersuchungen des solaren Nebels, aus dem die Planeten und Planetoiden entstanden sein sollen, konnte etwas Licht ins Dunkel gebracht werden. Durch die Verschiebung der säkularen Resonanzen durch den Nebel und den Gaszug des Nebels wurden die Exzentrizitäten und Inklinationen der Körper zunächst gedämpft. Doch mit dem langsamen Verschwinden des solaren Nebels herrschten die säkularen Resonanzen in den Bereichen, und die Exzentrizität und Inklinationen wuchsen an. Durch die Verschiebung der säkularen Resonanzen, die weiter andauerten, waren viele Bereiche von der Erhöhung der Exzentrizität und Inklination betroffen.

Mit diesem Phänomen kann auch das Verhalten bzw. die Beobachtung in dem gutstrukturierten Bereich zwischen 3,9 und 5,2 AE erklärt werden. In der 3:2

Kommensurabilität ist die Hilda-Gruppe und in der 4:3 Resonanzzone der Asteroid Thule anzutreffen. In den übrigen Bereichen befinden sich keine Körper. Obwohl es sich hier um ganzzahlige Umlaufverhältnisse handelt und nach dem KAM-Theorem in diesen Bereichen keine Asteroiden

auffindbar sein dürften, stimmen die Simulationen und die Beobachtungen überein. Nach den bekannten Berechnungen, in denen die Störung der äußeren Planeten berücksichtigt wurde, treten in der oben genannten Kommensurabilität stabile Bereiche auf. Doch erst mit der Beachtung des solaren Nebels bei der Entstehung des Sonnensystems, der hohe Inklinationen und starke Exzentrizitäten zur Folge hatte, ist die heutige Verteilung der Asteroiden in diesen Bereichen besser verständlich. Auf der Bahn des Jupiter sind die Trojaner anzutreffen, die sich in den Lagrangepunkten aufhalten. Diese fünf bekannten Punkte zeigen die Bereiche an, die ein stabiles Verhalten kleiner Körper in einem Dreikörperproblem zulassen. Somit treten keine starken Veränderungen in der Gruppe der Trojaner auf.

Erst weitere Simulationen können zu genaueren Ergebnissen führen, wobei die Berechnungen alle auftretenden Störungen zu berücksichtigen wissen. Allerdings besteht das Problem der langen Rechenzeit und des großen Aufwandes, die sehr komplizierten Differentialgleichungen zu lösen. „The picture of the origin of the [astroids] is getting more

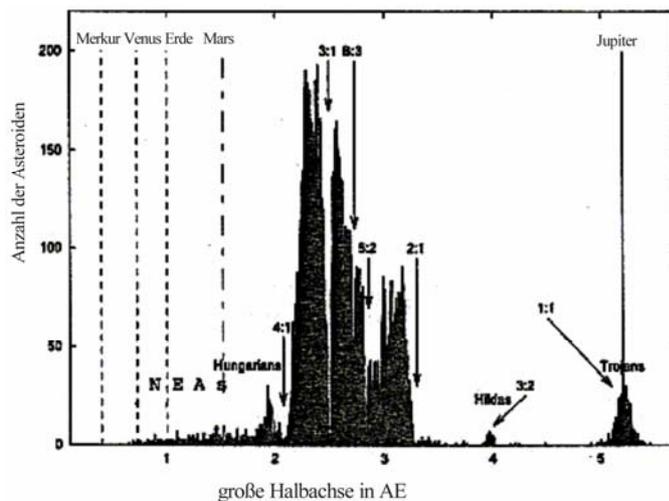


Abb. 1: Die Verteilung der Asteroiden im Asteroidengürtel. Die Lücken und Häufungen bei rationalen Umlaufverhältnissen sind deutlich zu erkennen (FREISTETTER 2000).

complex, but this is because it is getting more realistic.“ (MORBIDELLI 1999, S. 49)

Weitere Ansammlungen kleiner Körper sind hinter Neptun in dem sogenannten Kuipergürtel und in der Oortschen Wolke, die sich in einer Entfernung von 20 000 bis 70 000 AE von der Sonne befindet, entdeckt worden bzw. werden dort vermutet. Durch den nahen Vorübergang einiger sonnennaher Sterne oder die Störung der äußeren großen Planeten können die Körper, die sich im Kuipergürtel oder in der Oortschen Wolke befinden, gestört werden und bei ganzzahligen Umlaufverhältnissen aus ihrer Bahn geworfen werden, so dass sie ihren Weg ins Sonnensysteminnere oder in den interstellaren Raum beginnen und evtl. als Kometen sichtbar werden. In diesen Anhäufungen von Körpern im Kuipergürtel sind wie im Asteroidengürtel Lücken zu sehen, die mit den rationalen Frequenzverhältnissen übereinstimmen. Genaue Untersuchungen werden vielleicht in Zukunft bessere Auskünfte liefern, da mit den heutigen Messmethoden und Instrumenten eine Beobachtung dieser entfernten Gebiete nicht möglich ist.

Hyperions Verhalten ist relativ gut erklärbar. Aufgrund der Gezeitenkräfte durch Saturn und seine elliptische Bahn, in der er durch die 4:3 Kommensurabilität mit Titan gehalten wird, begann Hyperion vor einiger Zeit zu torkeln. Die Aufzeichnung des reflektierten Lichts, das von Hyperion auf die Erde fällt, zeigt keine Periodizität. Die Drehung der Achsen des Trabanten Saturns ist also nicht vorhersagbar und somit chaotisch. Da Hyperion sich zur Zeit in einer breiten chaotischen Zone aufhält, die im Poincaréschnitt deutlich zu erkennen ist, und durch Titans Einfluss seine Bahn nicht verlässt, wird sich an seinem Verhalten vermutlich auch in näherer Zukunft nichts ändern.

Ob Plutos Verhalten chaotisch ist oder ob die verschiedenen Periodizitäten, die mehrere Mrd. Jahre lang sein können, noch nicht erkannt sind, wird erst mit weiteren Berechnungen, die einen sehr großen Zeitraum einnehmen müssen, gesagt werden können. Mit der Verbesserung der Computertechnik wurden im Laufe der Jahre immer mehr Periodizitäten entdeckt, die zuvor als chaotisches Verhalten interpretiert wurden. Mit weiteren Verbesserungen und neuen Ideen zur Programmierung des Mehrkörperproblems werden in Zukunft vielleicht weitere Zusammenhänge und Stabilitäten in Plutos Bahn erkennbar.

Die Kenntnisse der Anfangsbedingungen spielen im gesamten Sonnensystem eine entscheidende Rolle. Von diesen Angaben ist das Verhalten der inneren Planeten, besonders von Merkur und Venus abhängig. Die Simulationen werden jedes Mal mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen wiederholt, um verschiedene Verhaltensweisen zu erkennen. Dabei kam es nur in sehr wenigen Fällen zu einer Kollision zwischen den beiden inneren Planeten. Die äußeren Planeten zeigen selbst bei Variation der Anfangsbedingungen kaum Störungen in ihren Bahnen. Alle Planeten des Sonnensystems bewegen

sich zur Zeit sehr geordnet, sie umkreisen die Sonne im gleichen Umlaufsinn und in geordneten, etwas schwankenden Abständen nach der Titius-Bodeschen-Regel. Alle diese Eigenschaften sind nicht durch das Gravitationsgesetz beschrieben. Heinz-Otto PEITGEN sagte: „Obwohl die Gleichungen des Sonnensystems im Prinzip Chaos zulassen, hat eine Art göttliche Fügung möglicherweise das Sonnensystem auf die richtige Anfangsposition gesetzt.“ (BREUER 1985, S.48) Physikalisch plausibler ist jedoch die Auffassung, dass diese geordneten Zustände als das Ergebnis einer bewegten Geschichte seit der Entstehung der Planeten darstellen (vgl. ROHLFS 1992). Vielleicht können Beobachtungen anderer Planetensysteme Aufschluss über das Verhalten unseres Sonnensystems geben. Doch um die Planeten anderer Sonnen beobachten zu können, wird noch einige Zeit vergehen, da die Planeten selbst zur Zeit aufgrund des Lichts der Sonne(n) nicht sichtbar sind. Mit neuen Instrumenten können vielleicht in Zukunft ähnliche Systeme wie unser Sonnensystem beobachtet werden und daraus Schlüsse auf das Verhalten „unserer“ Planeten gezogen werden.

3 Konservatives Chaos im Physikunterricht

Das eingeschränkte Dreikörperproblem ist das kleinste streng konservative System, an dem bereits chaotisches Verhalten sichtbar wird. Die Experimente, die auf der Erde im Rahmen der Chaostheorie etwa mit dem exzentrischen Drehpendel untersucht werden, können nur zum Teil die Bewegungen andeuten, die in konservativen Systemen auftreten. Somit könnte in der Schule in höheren Jahrgangsstufen die Simulation des eingeschränkten Dreikörperproblems mit unterschiedlicher Gewichtung durchaus sinnvoll eingesetzt werden, da die Gleichung des Systems einfach aus dem Gravitationsgesetz Newtons für das Zweikörperproblem ableitbar ist. An diesem Beispiel kommt außerdem die Bedeutung des Computers als Instrument der physikalischen Erkenntnisgewinnung zum Ausdruck. Denn ohne Simulationen wären im vorliegenden Fall so gut wie keine Aussagen über das langfristige Verhalten der Planeten im Sonnensystem möglich.

Für die Behandlung des Themas im Physikunterricht spricht auch der Befund, dass die Astronomie einen Bereich der Physik darstellt, der das Interesse der Schüler zu wecken vermag.

4 Schluss

Auch 300 Jahre nach Newton können nur Vermutungen über das Sonnensystem angestellt werden, und es gibt keine allgemeine Lösung für das Vielkörperproblem. Die Himmelsmechanik wird vorerst eine - vor allem mathematische - Experimentalwissenschaft bleiben, denn die Frage der mathematischen Beweise ist nach wie vor kontrovers. Wird POINCARÉ Glauben geschenkt, dann ist ein solcher Beweis gar nicht möglich. Am Beispiel des Dreikörpersystems wird deutlich, inwieweit unsere Welt

durch Ordnung und „kreativem“ Chaos bestimmt wird. Die Erkenntnis, dass „die Zukunft ... nicht vorhersagbar.“ (NÜRNBERGER 1993, S.88) ist,

könnte zudem dazu beitragen, ein etwas realistischeres Bild der Welt zu entwerfen als es aus der Sicht der nichtlinearen Physik nahegelegt wird.

Literaturverzeichnis

Breuer, R.: Chaos ; In: *GEO* 7,1985

Freistetter, F.: *NEAs: neue Entwicklungen und Ergebnisse*, (2000) unveröffentlicht-

Hubbard, B., Hubbard, J.: Gesetz und Ordnung im Universum: die KAM -Theorie; In: *Spektrum der Wissenschaft* Dez (94), S 86-96

Laskar, J.: The Chaotic Motion of the Solar System: A Numerical Estimate of the Size of the Chaotic Zone; In *Icarus* 88, 1990, S. 266-291

Morbidelle, A.: Origin and Evolution of Near Earth Asteroids; In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 73, S. 39 – 50, 1999

Nürnberger, Christian: *Faszination Chaos: wie zufällige Ordnung entsteht*. Stuttgart: TRIAS – Thieme Hippokrates Enke, 1993

Peterson, Ivars: *Was Newton nicht wußte. Chaos im Sonnensystem*. Boston/Berlin: Birkhäuser, 1994

Rohlf, K.: *Die Ordnung des Universums*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1992

Wisdom, J.: Urey Prize Lecture: Chaotic Dynamics in the Solar System; In: *Icarus* 72, 1987, S. 241-275